

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ»
ПЕРМСКИЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ –
ФИЛИАЛ ФИНУНИВЕРСИТЕТА

РАССМОТРЕНО

на заседании кафедры информационных
систем и программирования

Протокол № 6 от «24» января 2023 г.

Зав. кафедрой  /И.В. Галкин

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по дисциплине «Элементы высшей математики» по теме «Интеграл и
его приложение»

для специальности 09.02.07 Информационные системы и
программирование

г. Пермь, 2023 г.

Разработчик:

Виноградова Н.А., преподаватель высшей квалификационной категории Пермского филиала Финуниверситета

Рецензент: Ставицкая Е.А., преподаватель первой категории Пермского филиала Финуниверситета

Одобрено Научно-методическим советом филиала
Протокол № 3 от «28» марта 2023 г.

Оглавление

Пояснительная записка.....	3
Неопределенный интеграл	4
Понятие первообразной	4
Свойства неопределенного интеграла	4
Таблица основных интегралов	4
Методы интегрирования:	5
Примеры решения типовых примеров.....	6
Упражнения для самостоятельной работы.....	7
Определенный интеграл	8
Понятие определенного интеграла.....	8
Основные свойства определенного интеграла.	9
Правила вычисления определенного интеграла	9
Примеры решения типовых примеров.....	10
Упражнения для самостоятельного решения.....	11
Площади плоских фигур.....	12
Теоретический материал.....	12
Примеры решения типовых примеров.....	13
Упражнения для самостоятельного решения.....	13

Пояснительная записка

Методические рекомендации по дисциплине «Элементы высшей математики» по теме «Интеграл и его приложение» предназначены для студентов, обучающихся на базе основного и среднего общего образования, по программам подготовки специалистов среднего звена, для специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики.

Цель методических рекомендаций: оказание помощи студентам в организации самостоятельного изучения учебного материала в форме лекции и практических работ. Выполнение самостоятельных внеаудиторных работ позволяет формировать в соответствии с ФГОС СПО следующие компетенции:

- Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ОК 01.
- Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности ОК 02.
- Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие ОК 03.
- Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами ОК 04.
- Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста ОК 05.
- Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей ОК 06.
- Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях ОК 07.
- Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности ОК 08.
- Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности ОК 09.

В методической работе автором кратко излагается теоретический материал по заданной теме, даются рекомендации к выполнению практических заданий.

Неопределенный интеграл

Понятие первообразной

Функция $F(x)$ называется первообразная для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении $F(x)+C$, где C -постоянная.

Операция нахождения первообразной функции называется интегрированием функции.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Здесь $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $(\int f(x)dx)'=f(x)$
2. $d(\int f(x)dx)=f(x)dx$
3. $\int dF(x)=F(x)+C$
4. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$, где a - постоянная
5. $\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

Таблица основных интегралов

- | | |
|---|---|
| 1. $\int 1 dx = x + C$ | 7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ |
| 2. $\int \frac{x^n}{1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ | 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$ |
| 3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, n = -1$ | 9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ |
| 4. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$ | 10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| 5. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C$ | 11. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ |
| | 12. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$ |

$$6. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$13. \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$14. \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm b}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm b} \right| + C$$

Методы интегрирования:

Непосредственное интегрирование: Непосредственное интегрирование называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным, путем применения к ним основных свойств неопределенных интегралов.

Например:

$$\begin{aligned}
 1. \int \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+5}} + 4 \cdot 5^{-x} - \frac{6}{x^2+25} \right) dx &= 2 \int \frac{x}{x^2+5} dx + 4 \int 5^{-x} dx - 6 \int \frac{1}{x^2+5} dx = 2 \frac{x^{\frac{4}{2}}}{\frac{2}{2}} + 4 \frac{5^{-x}}{\ln 5} - 6 \frac{1}{5} \arctg \frac{x}{5} + C = \\
 &= \frac{3}{2} \sqrt{x^2+5} + \frac{4}{\ln 5} 5^{-x} - \frac{6}{5} \arctg \frac{x}{5} + C \\
 2. \int \left(\frac{3}{x} + \frac{\ln 5}{\sqrt{x^2-3}} + \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx &= 3 \int x^{-1} dx + 4 \int \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} dx + 6 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3 \ln |x| + 4 \ln \left| x + \sqrt{x^2-3} \right| - 6 \operatorname{ctg} x + C
 \end{aligned}$$

Метод подстановки. В основе метода подстановки или метода замены переменной лежит следующая формула, являющаяся простым следствием правила дифференцирования сложной функции.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = (t = g(x) \Rightarrow dt = g'(x)dx) = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

В случае, когда аргументом функции является линейная функция,

$$\text{можно воспользоваться формулой: } \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Например:

$$\begin{aligned}
 1. \int (2x+1)^{30} dx &= \frac{(2x+1)^{31}}{31 \cdot 2} + C = \frac{(2x+1)^{31}}{62} + C \\
 2. \int \frac{3}{\sin^2(6x)} dx &= 3 \cdot \frac{-1}{\operatorname{ctg}(6x)} + C = -\frac{1}{\operatorname{ctg}(6x)} + C \\
 3. \int \frac{1}{1-2x^4} dx &= \int \frac{1}{1-(2x)^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t^4} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \ln |1-t| - \frac{1}{4} \ln |1+t| + \frac{1}{2} \arctg t \right) + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1-2x}{1+2x} \right| + \frac{1}{4} \arctg 2x + C \\
 4. \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= (t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx) = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\ln x} + C
 \end{aligned}$$

$$+ C = 2$$

$$+ C$$

Метод интегрирования по частям. Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле: $\int u dv = uv - \int v du$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - заданные функции.

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

Формула интегрирования по частям используется для следующих типов интегралов:

1) $\int x^n \ln x dx$; $\int x^n \arcsin x dx$; $\int x^n \arctg x dx$; $\int x^n \arccos x dx$; $\int x^n \operatorname{arcctg} x dx$ Здесь $u = \ln x$ (или обратная тригонометрическая функция), $dv = x^n dx$

2) $\int x^n a^x dx$; $\int x^n \sin x dx$; $\int x^n \cos x dx$

Здесь $u = x^n$

3) $\int a^x \cos x dx$; $\int a^x \sin x dx$

Здесь в качестве функции $u = u(x)$ можно взять как показательную, так и тригонометрическую функцию ($u = a^x$), но формулу интегрирования по частям необходимо использовать дважды, причем оба раза за u выбирается показательная функция. После двукратного интегрирования по частям получается линейное уравнение относительно искомого интеграла.

Примеры решения типовых примеров

$$1. \int x^4 \ln x dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^4 dx \Rightarrow v = \frac{x^5}{5} \end{array} \right) =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^5}{5} - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{5} x^5 \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \ln x - \frac{1}{25} x^5 + C$$

$$2. \int x \cos x dx = \left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = 1 \cdot dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right) =$$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\begin{aligned}
3. \int e^x \sin x dx &= \left(\begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right) = \\
&= e^x (-\cos x) - \int -\cos x \cdot e^x dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx = \\
&= \left(\begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right) = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx
\end{aligned}$$

Обозначим искомую первообразную через $F(x)$, получим следующее уравнение :

$$F(x) = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - F(x)$$

$$2 \cdot F(x) = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

Упражнения для самостоятельной работы

$$1. \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^2} dx$$

$$12. \int (3x-1)^2 dx$$

$$23. \int x e^{-x^2} dx$$

$$2. \int \frac{x^2 + \sqrt{x^3} + 3}{\sqrt{x}} dx$$

$$13. \int \frac{x}{x+3} dx$$

$$24. \int x^3 e^{x^4} dx$$

$$3. \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 4}$$

$$25. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$4. \int (\sqrt{x} + 7^x) dx$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 + 8x + 25}$$

$$26. \int e^x dx$$

$$5. \int \frac{2^x 3^{2x} dx}{2^x + 5^x}$$

$$16. \int \frac{dx}{9x^2 + 12x - 5}$$

$$27. \int \frac{\sqrt{4 - e^{2x}}}{(\sin 7x + \cos \frac{x}{2})} dx$$

$$6. \int -10^x dx$$

$$x^5 dx$$

9

$$7. \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$$

$$17. \int \frac{dx}{7x^6 + 1}$$

$$28. \int \cos^5 x \sin x dx$$

$$8. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$18. \int \frac{x^7 dx}{x^{16} + 1}$$

$$29. \int \operatorname{ctg} x dx$$

$$30. \int e^{\cos x} \sin x dx$$

$$9. \int \operatorname{ctg}^2 x dx$$

$$19. \int \frac{dx}{(3 + 5x^3)^2}$$

31.

$$\int \sin^2 x dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$11. \int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx$$

$$20. \int \sqrt{2-5x} dx$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{27+6x-x^2}}$$

$$22. \int x \sqrt{3x^2-1} dx$$

$$32. \int \frac{dx}{\cos x}$$

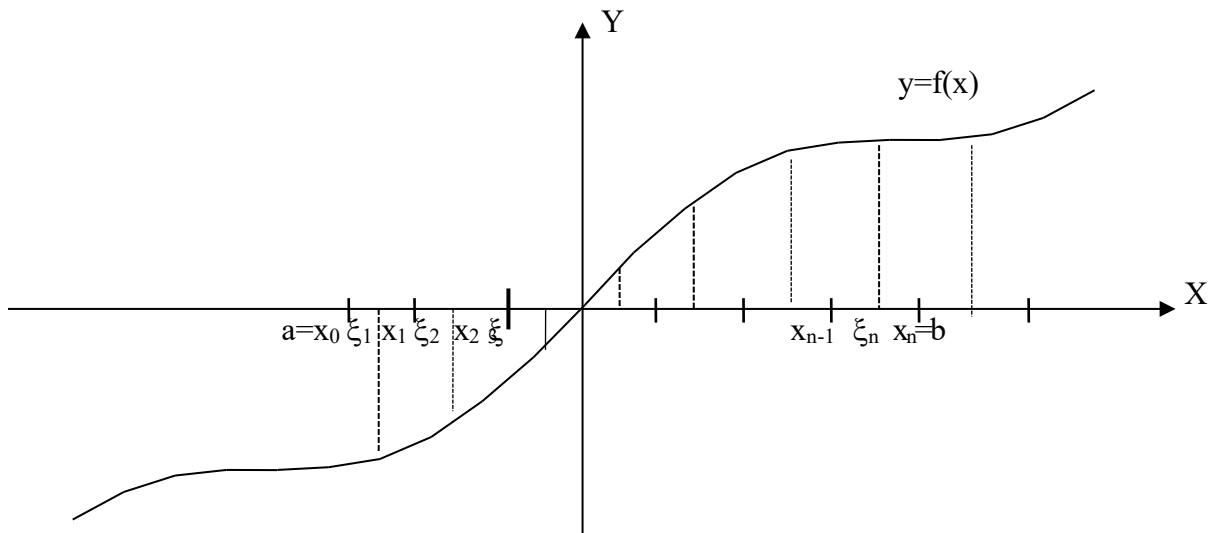
$$33. \int \sqrt[3]{1+\cos x} \sin x dx$$

$$\sqrt{x}$$

Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и найдем длину каждого такого отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.



Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма вида:

$$\sigma = \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_k (теорема существования определенного интеграла).

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Если $f(x) > 0$ на $[a,b]$, то определенный интеграл геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции - фигуры, ограниченной линиями:

$y=f(x)$, $f(x) > 0$ на $[a,b]$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью OX ($y=0$).

Основные свойства определенного интеграла.

$$\begin{aligned}
 1) \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\
 2) \int_a^a f(x) dx &= 0 \\
 3) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\
 4) \int_a^b K \cdot f(x) dx &= K \cdot \int_a^b f(x) dx \\
 5) \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx
 \end{aligned}$$

Правила вычисления определенного интеграла:

1. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Интегрирование по частям

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

3. Замена переменной

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = F(\beta) - F(\alpha)$$

$\left(\begin{array}{l} t = g(x) \Rightarrow dt = g'(x) dx \\ \alpha = g(a) \quad \beta = g(b) \end{array} \right)$

Примеры решения типовых примеров

Вычислить определенные интегралы:

$$1. \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left. \operatorname{tg} x \right|_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$2. \int_1^6 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx = \left. \begin{array}{l} \int_{t=1}^5 t^3 \sqrt{t^2 - 1} dt \\ \left(\begin{array}{l} t = x^2 - 1 \Rightarrow dt = 2x dx \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 3 \Rightarrow t = 8 \end{array} \right) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^8 \sqrt{t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left. \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right|_0^8 = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^8 = \frac{1}{3} (8^{\frac{3}{2}} - 0) = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{8} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$3. \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \left(\begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right) = e^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot e^x dx =$$

$$= e^{\pi/2} \sin(\pi/2) - e^0 \sin 0 - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot e^x dx = \left(\begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right) =$$

$$= e^{\pi/2} - 0 - \left(-e^x \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot e^x dx \right) =$$

$$e^{\pi/2} + e^{\pi/2} \cos(\pi/2) - e^0 \cos 0 - \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot e^x dx, \text{ Обозначим } A = \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot e^x dx$$

$$A = e^{\pi/2} + 0 - 1 - A \Rightarrow 2A = e^{\pi/2} - 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

Упражнения для самостоятельного решения

Вычислите интегралы:

$$1. \int_1^2 (2x+1) dx$$

$$2. \int x(3-x) dx$$

$$3. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$5. \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$6. \int_{-3}^1 x^2 - 1 dx$$

$$7. \int_0^4 x^2 + 4x + 5 dx$$

$$8. \int_3^5 x^2 - 3x + 2 dx$$

$$9. \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$10. \int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$11. \int_0^1 \sqrt{4-3x} dx$$

$$12. \int_{0.5}^2 \frac{dx}{\sqrt{5-2x}}$$

$$18. \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx$$

$$19. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$20. \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$$

$$21. \int_0^1 6 - 5 \sin x + \sin^2 x dx$$

$$22. \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$23. \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$$

$$24. \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

$$25. \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$26. \int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$27. \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx$$

$$28. \int_1^e \frac{1}{x} \cos \ln x dx$$

$$13. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$14. \int_2^{3.5} \sqrt{5 + 4x - x^2} dx$$

$$15. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$$

$$16. \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$17. \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$$

$$29. \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$$

$$30. \int_0^{\pi/2} x \sin x dx$$

$$31. \int_1^2 x^2 \sin x dx$$

$$32. \int_0^{\pi} \arccos x dx$$

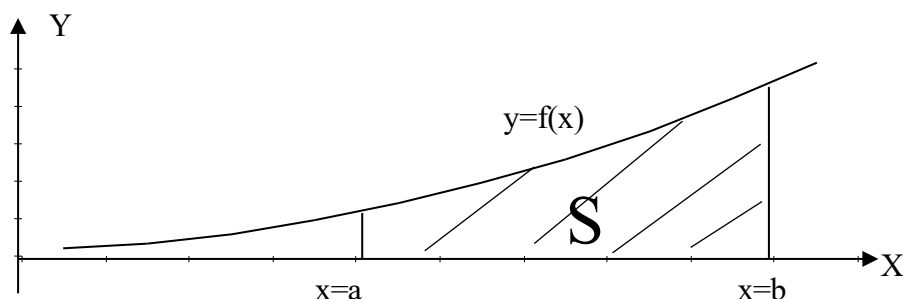
$$33. \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

0

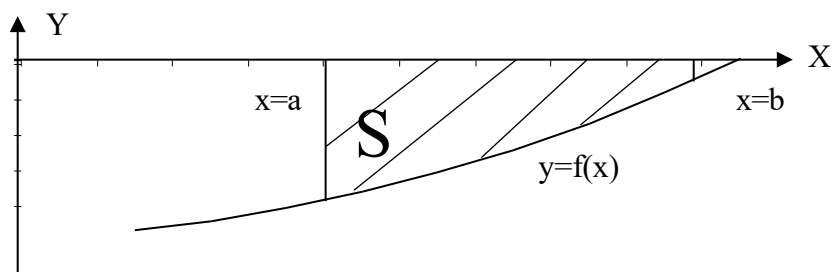
Площади плоских фигур

Теоретический материал

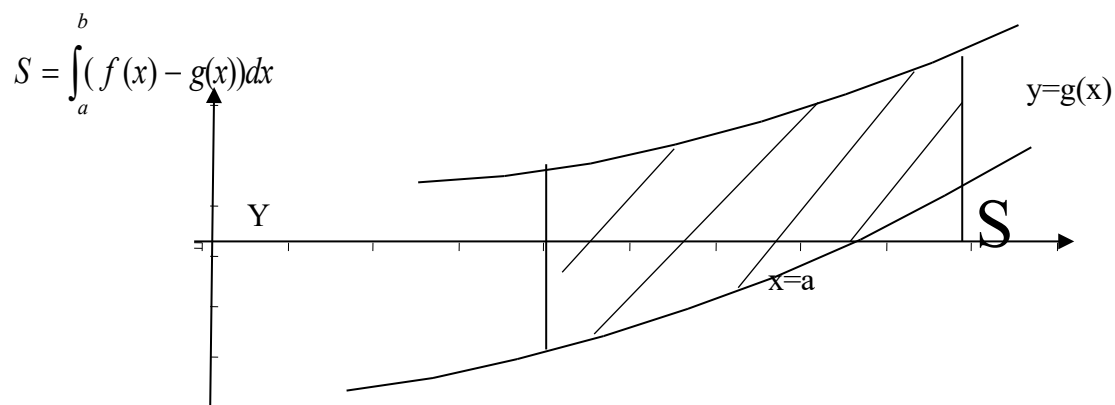
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ [$f(x) \geq 0$], прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox , вычисляется по формуле:
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Пусть теперь $y=f(x)$ - неположительная непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, тогда площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$ [$f(x) < 0$], прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox , вычисляется по формуле:
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$ [$f(x) \leq g(x)$] и прямыми $x=a$ и $x=b$, находится по формуле:

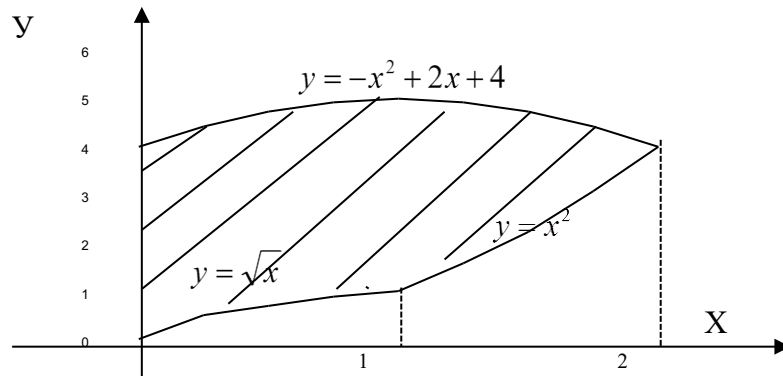


$$\begin{aligned}
 & x=b \\
 & y \\
 & = \\
 & f \\
 & (\\
 & x \\
 &) \\
 & X
 \end{aligned}$$

Примеры решения типовых примеров

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{x}, \quad x \in [0;1], \quad y = x^2, \quad x \in [1;2], \quad y = -x^2 + 2x + 4 \quad x \in [0;2]$$



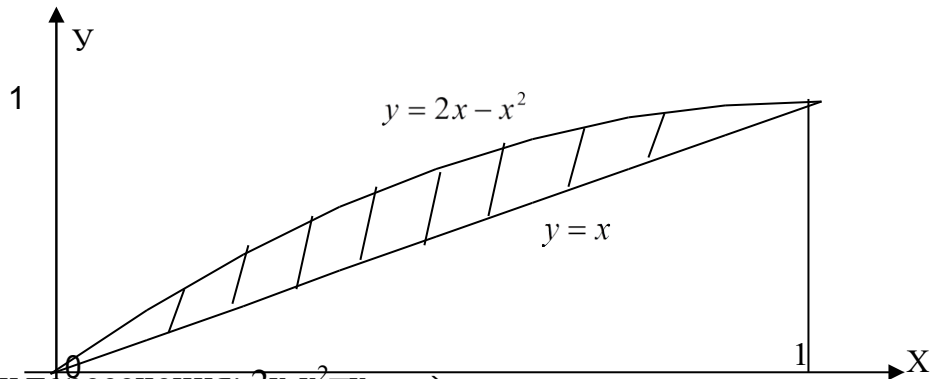
Решение:

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 4) dx - \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_1^2 x^2 dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 - \left(\frac{2}{3} \sqrt{x} \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{19}{3} - \frac{2}{3} = 6 \frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x - x^2, \quad y = x$$

Решение:



Найдем точки пересечения: $2x - x^2 = x \Rightarrow$

$x_1 = 0, x_2 = 1$. Так как график прямой на

интервале $[0;1]$ всюду находится ниже графика параболы, то

$$S = \int_0^1 (2x - x^2 - x) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ (кв.ед.)}$$

Упражнения для самостоятельного решения

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y = -x^2$, $x + y - 2 = 0$;
2. $y = x^3 - 4x$, $y = 0$;
3. $y = -x^2$, $y = x^2 - 2x - 4$;
4. $y = x^3$, $x + y = 2$, $y = 0$;
5. $y^2 - 4x = 0$, $x - y = 0$;

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x+3$, касательной к ней в точке $(3;6)$ и осями координат.
7. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке $(3;5)$ и осью ординат.
8. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $x=1$, гиперболой $y=1+1/x$ и касательной к ней в точке $(2; 1,5)$.